

均質な導電球内にある球状電流電極による 電位及び両電極間の電気抵抗 (第1報)

鈴木 長 次

Electric Potential Produced by two Spherical Current Electrodes in a Homogeneous Conducting Sphere and the Electric Resistance between them (I)

Chōji SUZUKI

The electric potential produced by two spherical current electrodes located in a homogeneous conducting sphere is obtained for arbitrary locations and separations.

In all other previous solutions in this field, these current electrodes have been assumed to be two points, the magnitude of which being usually neglected. The present paper deals with the theory and the method of obtaining the electric potentials not only in a conducting sphere, but also of the electrodes themselves as well as the electric resistance between them, extending the theory on the point electrodes to the spherical electrodes, on the assumption that the electrodes are made of an electrically perfect conductor.

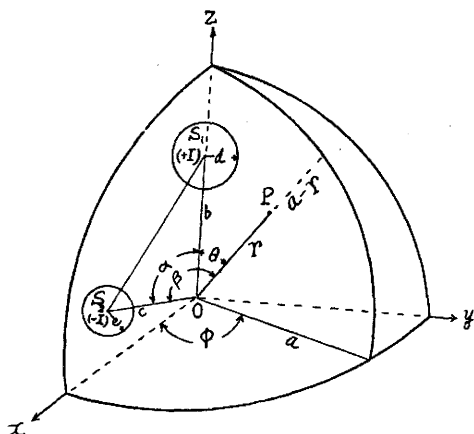
The electric resistance between two spherical electrodes is investigated theoretically as well as experimentally. Some applications of this study are the fundamental research of electrocardiography and the measurement of the electric resistance of electrolyte.

1. 緒 言

均質な導電球内に正負の電流電極がある時球内及び球面における電位を求める場合、従来の理論では電流電極を点として取扱い電極の大きさは考えていない。本報告はこの点電流電極についての理論⁽¹⁾を、電流電極が球状電極（電極は完全導体即ち抵抗零とする）の場合に拡張して、導電球内の電位、電極の電位及び両電極間の電気抵抗の理論式を求めたものである。二三の試料について電気抵抗を実測し理論値と比較したところ、小球状電極については予想通りでよく符合した。比較的大きい電極については尙研究中である。本理論は心電計の基礎研究及び電解液の固有抵抗の測定その他に応用される。

2. 理 論

第1図に示す如く半径 a 、固有抵抗 ρ の導電球内に球の中心 O より夫々 b , c の位置に電流電極 S_1 ,



第 1 図

S_2 があつてこれに一定の大きさの直流電流 I が流れている時の球内の任意の点の電位の式、電極の電位並に両電極間の電気抵抗の式を求める。但し電極 S_1, S_2 は半径夫々 d, e の球状電極でその抵抗は零である完全導体電極とする。

導電球内の任意の一点 $P(r, \theta, \phi)$ の電位 V は、 a, b, c, r 等に比較して d, e が充分小で電極 S_1, S_2 を点と看做しうる場合には

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_n}{r^{n+1}} + B_n r^n \right) P_n(\cos\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{C_n}{r^{n+1}} + D_n r^n \right) P_n(\cos\beta) \dots\dots\dots (1)$$

$$a > r > b, c$$

$$\cos\beta = \sin\alpha \sin\theta \cos\phi + \cos\alpha \cos\theta \dots\dots\dots (2)$$

$P_n(\cos\theta), P_n(\cos\beta)$ は Legendre の函数であり A_n, B_n, C_n, D_n 等は次の条件より定まる。即ち電位 V が Laplace の式を満足し無限遠では零であることより

$$P_0(\cos\theta) = 1, \quad P_0(\cos\beta) = 1, \quad A_n = \frac{I\rho}{4\pi} b^n, \quad C_n = \frac{I\rho}{4\pi} c^n \quad n=1, 2, 3, \dots\dots\dots$$

又導電球の表面において電位 V の r 方向の導函数は零である。

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

この条件から

$$B_0 = 0, \quad B_n = \frac{I\rho}{4\pi} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{b^n}{a^{2n+1}} \quad n=1, 2, 3, \dots\dots\dots$$

$$D_0 = 0, \quad D_n = \frac{I\rho}{4\pi} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{c^n}{a^{2n+1}} \quad n=1, 2, 3, \dots\dots\dots$$

$$\text{なお } r > b \text{ の時, } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b^n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) = \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b^n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \dots\dots\dots (4)$$

$$r > c \text{ の時, } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c^n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\beta) = \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c^n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\beta) \dots\dots\dots (5)$$

であるから(1)式は次の如くなる。

$$V = \frac{I\rho}{4\pi} \left[\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r^{n+1}} + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{r^n}{a^{2n+1}} \right) b^n P_n(\cos\theta) \right] - \frac{I\rho}{4\pi} \left[\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r^{n+1}} + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{r^n}{a^{2n+1}} \right) c^n P_n(\cos\beta) \right] \dots\dots\dots (6)$$

$$= \frac{I\rho}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r^{n+1}} + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{r^n}{a^{2n+1}} \right) \left[b^n P_n(\cos\theta) - c^n P_n(\cos\beta) \right] \dots\dots\dots (7)$$

$$a > r > b, c$$

又 $b > r$ の時は(4)式及び(6)式の $P_n(\cos\theta)$ の項における r と b とを入替え、 $c > r$ の時は(5)式及び(6)式の $P_n(\cos\beta)$ の項における r と c とを入替えればよい。

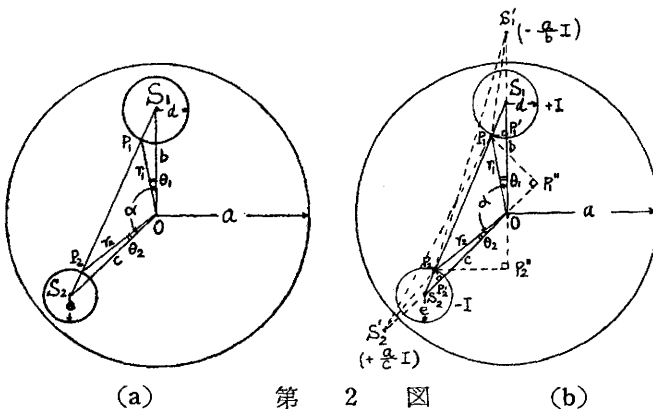
$$r > b \text{ の時, } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r^n}{b^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) = \frac{1}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^n}{b^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \dots\dots\dots(8)$$

$$r > c \text{ の時, } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r^n}{c^{n+1}} \right) P_n(\cos\beta) = \frac{1}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^n}{c^{n+1}} \right) P_n(\cos\beta) \dots\dots\dots(9)$$

従つて(7)の電位 V の式は $a > b, c > r$ の時は

$$V = \frac{I\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \frac{I\rho}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{b^{n+1}} + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{b^n}{a^{2n+1}} \right) r^n P_n(\cos\theta) - \left(\frac{1}{c^{n+1}} + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{c^n}{a^{2n+1}} \right) r^n P_n(\cos\beta) \right] \dots\dots\dots(10)$$

さて一般に完全導体即ち抵抗零の球状導体が帯電している時は、球の表面は同一電位であり、球外の電位は総電荷が球の中心に集つた場合即ち点電荷の場合と同一である。それ故に電流電極 S_1, S_2 を点電流源と看做して求めた電位の式(7)及び(10)式は、電極 S_1, S_2 がそれぞれ半径 d, e の球状電極(電極は完全導体で抵抗は零とする)である場合でも、 d, e が他の寸法に比較して小さい条件の下では近似的に成立すると考えられる。点電流電極の場合には電極の電位は求められないが、上記の如く大きさのある電極を考えると次の様に求められる。



電極 S_1, S_2 の電位を夫々 V_{s1}, V_{s2} とすれば、これはそれぞれ P_1, P_2 点の電位であるから(第2図(a)参照)

$$V_{s1}: - \phi=0, \theta=\theta_1, \beta=\alpha-\theta_1, r=r_1 \dots\dots\dots(11)$$

$$V_{s2}: - \phi=0, \theta=\alpha-\theta_2, \beta=\theta_2, r=r_2 \dots\dots\dots(12)$$

但し a, b, c, r_1, r_2, d, e 等の大きさの関係で V_{s1}, V_{s2} を表わす式はそれぞれ異つた形となる事は前記の電位 V の式(7), (10)を求めた時と同様である。こゝでは後の便宜の為に $a, b, c > r_1, r_2$ の場合

について V_{s1}, V_{s2} を求める。即ち(10)式に(11), (12)の関係を入れ、

$$V_{s1} = \frac{I\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \frac{I\rho}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{b^{n+1}} + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{b^n}{a^{2n+1}} \right) r_1^n P_n(\cos\theta_1) - \left(\frac{1}{c^{n+1}} + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{c^n}{a^{2n+1}} \right) r_1^n P_n(\cos[\alpha-\theta_1]) \right], a, b, c > r_1 \dots\dots\dots(13)$$

$$V_{s2} = \frac{I\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \frac{I\rho}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{b^{n+1}} + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{b^n}{a^{2n+1}} \right) r_2^n P_n(\cos[\alpha-\theta_2]) - \left(\frac{1}{c^{n+1}} + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{c^n}{a^{2n+1}} \right) r_2^n P_n(\cos\theta_2) \right], a, b, c > r_2 \dots\dots\dots(14)$$

従つて $a, b, c > r_1, r_2$ の場合の電極 S_1, S_2 間の電気抵抗 R は

$$R = \frac{V_{s1} - V_{s2}}{I} = \frac{\rho}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{b^{n+1}} + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{b^n}{a^{2n+1}} \right) \left\{ r_1^n P_n(\cos\theta_1) - r_2^n P_n(\cos[\alpha - \theta_2]) \right\} \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{c^{n+1}} + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{c^n}{a^{2n+1}} \right) \left\{ r_1^n P_n(\cos[\alpha - \theta_1]) - r_2^n P_n(\cos\theta_2) \right\} \right] \dots\dots\dots (15)$$

, a, b, c > r₁, r₂

勿論 a, b, c, r₁, r₂, d, e, 等の大きさの関係で R の式は異つて来るが, それぞれの場合も (15) 式に準じて求め得る。

各部の寸法が与えられた時, 抵抗を実際に計算するには (15) 式に次の関係式を用いると図式的にも計算ができるので便利である。

$$-1 \leq x \leq 1, \quad 0 < h < 1 \text{ の時}$$

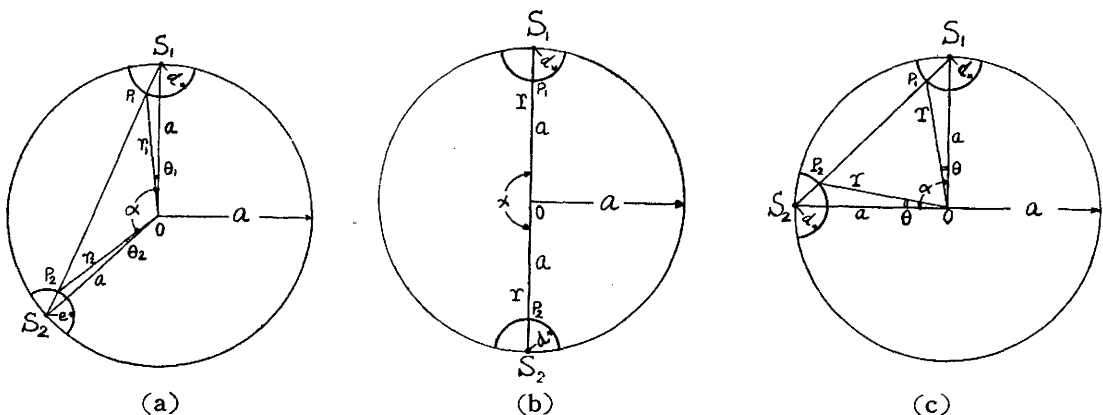
$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} h^n P_n(x) &= (1 - 2xh + h^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n} P_n(x) &= \log \frac{2}{1 - xh + \sqrt{1 - 2xh + h^2}} \\ P_n(-x) &= (-1)^n P_n(x), \quad x = \cos\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

(16) 式を用いて (15) 式の計算を行い, 第 2 図 (b) を参照して整頓すると

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left[\left\{ \left(\frac{1}{P_1 S_1} - \frac{1}{P_1 S_2} \right) - \left(\frac{1}{P_2 S_1} - \frac{1}{P_2 S_2} \right) \right\} + \left\{ \left(\frac{1}{P_1 S_1'} \cdot \frac{a}{b} - \frac{1}{P_1 S_2'} \cdot \frac{a}{c} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{1}{P_2 S_1'} \cdot \frac{a}{b} - \frac{1}{P_2 S_2'} \cdot \frac{a}{c} \right) \right\} + \frac{1}{a} \log \frac{(P_2'' S_1' + P_2 S_1') (P_1'' S_2' + P_1 S_2')}{(P_1' S_1' + P_1 S_1') (P_2' S_2' + P_2 S_2')} \right] \dots (17)$$

第 2 図 (b) は (a) 図と同一のものであるが, (17) 式の説明に便利のように描いたものである。図中 S₁', S₂' はそれぞれ点 S₁, S₂ の球面に関しての相反点でこゝに電気影像 (-I)a/b, (+I)a/c を考える。但し OS₁' = a²/b, OS₂' = a²/c, 又 P₁', P₁'', P₂', P₂'' はそれぞれ P₁ 及び P₂ より OS₁ 及び OS₂ に下した垂線の足である。本図を参照すると (17) 式の第 1 項は導電球内の電流源に直接関係しており, 第 2 項及び第 3 項は電気影像に関係を持つてることがわかる。

次に二三の例について抵抗 R の計算式を求めてみる。



第 3 図

(1) 半径がそれぞれ d, e の半球状電流電極が導電球の表面にある場合の抵抗 R の式 (第 3 図 (a) 参照)
この場合は a = b = c であるから (15) 式より

$$R = \frac{\rho}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right) \left[\left(\frac{r_1}{a} \right)^n P_n(\cos\theta_1) - \left(\frac{r_2}{a} \right)^n P_n(\cos[\alpha-\theta_2]) - \left(\frac{r_1}{a} \right)^n P_n(\cos[\alpha-\theta_1]) \right. \\ \left. + \left(\frac{r_2}{a} \right)^n P_n(\cos\theta_2) \right], \quad a > r_1, r_2 \quad \dots\dots\dots(18)$$

この式を(16)式の関係を用いて書き替えると、

$$R = \frac{\rho}{2\pi a} \left[\left\{ 1 - 2 \left(\frac{r_1}{a} \right) \cos\theta_1 + \left(\frac{r_1}{a} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} - \left\{ 1 - 2 \left(\frac{r_2}{a} \right) \cos(\alpha-\theta_2) + \left(\frac{r_2}{a} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \right. \\ \left. - \left\{ 1 - 2 \left(\frac{r_1}{a} \right) \cos(\alpha-\theta_1) + \left(\frac{r_1}{a} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} + \left\{ 1 - 2 \left(\frac{r_2}{a} \right) \cos\theta_2 + \left(\frac{r_2}{a} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \log \frac{\left\{ 1 - \left(\frac{r_1}{a} \right) \cos(\alpha-\theta_1) + \sqrt{1 - 2 \left(\frac{r_1}{a} \right) \cos(\alpha-\theta_1) + \left(\frac{r_1}{a} \right)^2} \right\}^*}{\left\{ 1 - \left(\frac{r_1}{a} \right) \cos\theta_1 + \sqrt{1 - 2 \left(\frac{r_1}{a} \right) \cos\theta_1 + \left(\frac{r_1}{a} \right)^2} \right\}^{\#}} \right. \\ \left. * \frac{\left\{ 1 - \left(\frac{r_2}{a} \right) \cos(\alpha-\theta_2) + \sqrt{1 - 2 \left(\frac{r_2}{a} \right) \cos(\alpha-\theta_2) + \left(\frac{r_2}{a} \right)^2} \right\}^*}{\left\{ 1 - \left(\frac{r_2}{a} \right) \cos\theta_2 + \sqrt{1 - 2 \left(\frac{r_2}{a} \right) \cos\theta_2 + \left(\frac{r_2}{a} \right)^2} \right\}^{\#}} \right] \quad \dots\dots\dots(19)$$

(19)式も(17)式に準じて図式的にも書き替えられるが省略する。

(2) 相等しい半球電流電極が導電球の北極部と南極部にある場合の抵抗Rの式 (第3図(b)参照)

この場合は $d=e$, $\theta_1=\theta_2=0$, $\alpha=\pi$, $r_1=r_2=a-d$ であるから (18), (19) より

$$R = \frac{\rho}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right) \left(\frac{a-d}{a} \right)^n \{ P_n(1) - P_n(-1) \} \\ = \frac{\rho}{\pi d} \left[1 - \frac{d}{2a-d} + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{a} \right) \log \frac{2a-d}{d} \right] \quad \dots\dots\dots(20)$$

この式は(17)からも直ちに求めうる。

(3) 相等しい半球状電流電極が導電球の北極部と赤道部にある場合の抵抗Rの式 (第3図(c)参照)

この場合は $d=e$, $\theta_1=\theta_2=\theta$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $r_1=r_2=r$ であるから(18), (19), 或は(17)から次の如くなる。

$$R = \frac{\rho}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^n \{ P_n(\cos\theta) - P_n(\cos[\alpha-\theta]) \} \\ = \frac{\rho}{\pi d} \left[1 - \frac{d}{\sqrt{2a-d}} + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{a} \right) \log \frac{\sqrt{2a-d}}{d} \right] \quad \dots\dots\dots(21)$$

なお(19), (20)式において電極の半径dはそのまゝとし、導電球の半径aだけを非常に大きくすると、抵抗の式は

$$R_{a=\infty} = \frac{\rho}{\pi d} \quad \dots\dots\dots(22)$$

となる。この式は固有抵抗 ρ の無限に拡る物質の表面(たとえば大地)に半径dの半球状金属電極(この金属の固有抵抗は物質たとえば大地の固有抵抗に比較すれば零と看做しうる)一組を遠い間隔を距て、相対して設置した時の抵抗(たとえば接地抵抗)の式で、他の方法でもとめた式と一致する。

3. 実験結果及び吟味

上記の理論を確かめる為に実験を行つた。一般に銅の固有抵抗は鉄の鋳物の固有抵抗に比較すると僅に数%にすぎないから、銅は鉄の鋳物に対しては近似的に完全導体と看做することができる。そこで電極は銅、導電球は鉄の鋳物で製作した。因に使用した銅の固有抵抗は $1.85 \times 10^{-6} \Omega \text{cm}$ 鉄の鋳物の固有抵抗は $77 \times 10^{-6} \Omega \text{cm}$ であつた。温度は 23°C である。

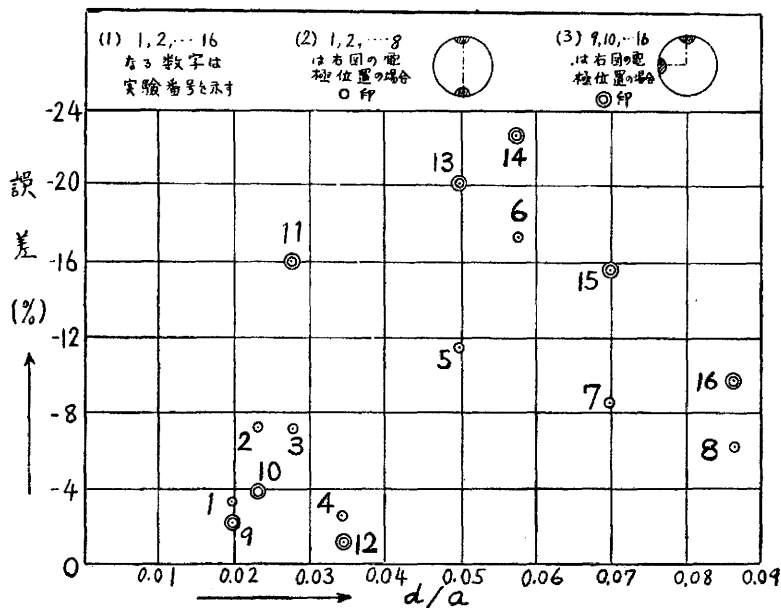
実験は電位の測定と電極間の電気抵抗の測定とであるが、電位については電極以外の場所では、点電流源の場合の電位分布と大した変りはない筈であるから大要は想像がつくので行わなかつた。電気抵抗の測定は色々の大さの導電球について、電極の大さ並に位置を変えて実測した。測定方法は電位降下法に依る。勿論電流の方向を反転して熱起電力の影響を除いてある。使用電流は約 0.1A 、標準抵抗は $10^{-3} \Omega$ のマンガニン製のもの、検流計の電圧感度は $3.8 \times 10^{-7} \text{V/mm}$ で内部抵抗は 600Ω である。

実験結果の一例は次表であり、又導電球の半径 a と電極の半径 d との比 (d/a) と、抵抗の理論値に

第 1 表 実験結果 (23°C)

試材の寸法			電極の位置が第3図(b)の場合の抵抗値				電極の位置が第3図(c)の場合の抵抗値			
導電球の半径 a (cm)	電極の半径 d (cm)	d/a	実験番号	理論値 R_1 (20)式 ($\times 10^{-6} \Omega$)	実測値 R_1' ($\times 10^{-6} \Omega$)	誤差 $\frac{R_1 - R_1'}{R_1} \times 100$ (%)	実験番号	理論値 R_2 (21)式 ($\times 10^{-6} \Omega$)	実測値 R_2' ($\times 10^{-6} \Omega$)	誤差 $\frac{R_2 - R_2'}{R_2} \times 100$ (%)
7.07	0.14	0.0198	1	181	187	- 3.3	9	180	184	- 2.2
6.10	0.14	0.0229	2	182	195	- 7.2	10	180	187	- 3.9
5.05	0.14	0.0277	3	183	196	- 7.1	11	181	210	- 16.0
4.05	0.14	0.0346	4	184	189	- 2.7	12	182	184	- 1.1
7.07	0.35	0.0497	5	75.3	84	- 11.5	13	73.2	88	- 20.2
6.10	0.35	0.0574	6	75	88	- 17.3	14	73.4	90	- 22.7
5.05	0.35	0.0697	7	75.5	82	- 8.6	15	73.5	85	- 15.7
4.05	0.35	0.0865	8	76.2	81	- 6.3	16	73.8	81	- 6.8

対する実測値の誤差との関係を示すと第4図の如くである。



第 4 図 b/a と誤差との関係

上記の結果より次のことが明である。

- (1) 理論値と実測値との誤差は d/a が大きくなるにつれて大きくなる。これは理論式を導くときの仮定からも当然である。
- (2) 実測値が理論値より常に大きくなっているのは電極と導電球との接触の影響、半田付の為の抵抗の増加等の為と思われる。因に使用した半田の固有抵抗は約 $20 \times 10^{-6} \Omega \text{cm}$ で銅の約10倍である。
- (3) 誤差の多いもの即ち実験番号 5, 6, 11, 13, 14, 15 の場合は電極附近の鋳物中に巣があるとか、同一材料で製作したのではあるが不純物の多い部分で製作されたのではないと思われる。
- (4) 誤差の多い上記(3)項のものを除けば d/a が0.05までの範囲では誤差は5%程度、 d/a が0.09までの範囲では誤差は10%程度である。この程度の誤差を許すとすれば理論式は d/a が0.09以下ならば使用できる。

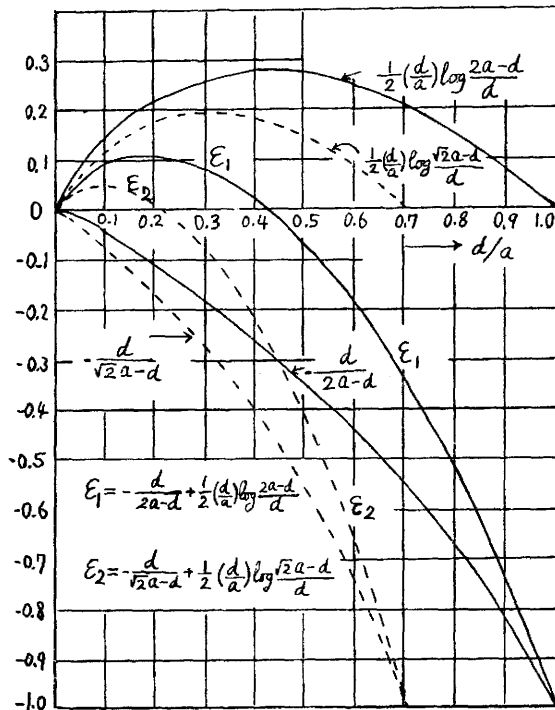
4. 結 言

上述の如く d/a が0.09以下では電気抵抗の理論式は実用上役立つ結果を得たが d/a がなお大きくなった場合どの程度の時まで理論式が使用できるか目下検討中である。その理由の一つは次の事である。(20), (21)式を次の如く書き替え、

$$R_1 = \frac{\rho}{\pi d} \left[1 - \frac{d}{2a-d} + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{a} \right) \log \frac{2a-d}{d} \right] = \frac{\rho}{\pi d} (1 + \varepsilon_1) \quad \dots\dots\dots (20)'$$

$$R_2 = \frac{\rho}{\pi d} \left[1 - \frac{d}{\sqrt{2}a-d} + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{a} \right) \log \frac{\sqrt{2}a-d}{d} \right] = \frac{\rho}{\pi d} (1 + \varepsilon_2) \quad \dots\dots\dots (21)'$$

上式における $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ と d/a との関係を図示すると第5図の如くなる。この図により明なように



第5図 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ と d/a との関係

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 共 d/a の増加と共に増大するがるところで最大となり次いで零となり; d/a が (20)' 式では1のとき, (21)' 式では $1/\sqrt{2}$ の時 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ と共に -1 となり従つてこのとき R_1, R_2 は共に零となる。これは電極と電極とが接触する場合であるから当然である。問題は d/a がある値の時に $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ が零となる事である。即ちこの場合は恰も $a=\infty$ と考えた時の状態である。これは明に不当と思われる。この事からも本理論は d/a の小さい範囲にのみ使用可能のことがわかる。 d/a の大きい即ち大電極についての研究が必要で目下之について研究している。

導電球の半径と電極の大きさが一定のとき抵抗値が導電球の固有抵抗の値のみに関係することより、導電球の代りに硝子球殻を用い、内部に電解液を入れると抵抗の測定が可能で、これについて実験をする予定である。終りに、試作並に実験された実験室の山形一三、藤井直次の両氏に感謝する。

文 献

- (1) E. Frank : J.A. Phys., Vol, 23, No.11, Nov., (1952)